Objetivos a cubrir **Código : MAT-CDI.2**

- Plano cartesiano. Distancia entre dos puntos. Punto medio de un segmento.
- Definición de lugar geométrico. Circunferencias y rectas
- Ecuaciones de la recta: Punto-pendiente. Pendiente-intersección con el eje y. General.
- Rectas paralelas. Rectas perpendiculares. Distancia entre rectas. Ángulos entre rectas.
- Funciones. Evaluación de funciones reales. Funciones básicas.
- Dominio y rango de una función real a valor real. Operaciones con funciones. Composición de funciones.

Ejercicios resueltos

Ejemplo 1 *: Hallar el valor de k de tal forma que la gráfica de la ecuación lineal $2x+ky+1=0$, sea perpendicular a $-5x+10y=3$*

Solución : Es conocido que dos rectas son perpendiculares si el producto de sus pendientes es igual a -1, así, buscamos las pendientes de las dos rectas dadas

$$\text{Recta } \ l_1 : 2x+ky+1=0 \ \text{ tiene pendiente } \ m_1 = -\frac{2}{k}$$

$$\text{Recta } \ l_2 : -5x+10y=3 \ \text{ tiene pendiente } \ m_2 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$

Luego para que sean perpendiculares se debe cumplir que

$$\left(-\frac{2}{k}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = -1 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{k} = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad k=1$$

★

Ejemplo 2 *: Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya suma de los cuadrados de sus distancias a los tres puntos $A(0,3)$, $B(3,0)$ y $C(-2,-2)$ es siempre igual a 30.*

Solución : Sea $P(x,y)$ un punto del plano, entonces

$$d(A,P) = \sqrt{(x-0)^2+(y-3)^2}; \qquad d(B,P) = \sqrt{(x-3)^2+(y-0)^2}; \qquad d(C,P) = \sqrt{(x+2)^2+(y+2)^2},$$

así, la suma de los cuadrados de estas distancias es siempre igual a 30, con lo que

$$(d(A,P))^2 + (d(B,P))^2 + (d(C,P))^2 = 30,$$

es decir,

$$x^2+(y-3)^2+(x-3)^2+y^2+(x+2)^2+(y+2)^2 = 30$$

desarrollando obtenemos

$$3x^2-2y-2x+3y^2+26=30 \qquad \Longrightarrow \qquad 3x^2-2y-2x+3y^2=4$$

completamos cuadrados en las variables x y y

$$3x^2-2x = 3\left(x^2-\frac{2}{3}x\right) = 3\left(\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{9}\right) = 3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{3}$$

mientras que,

$$3y^2-2y = 3\left(y^2-\frac{2}{3}y\right) = 3\left(\left(y-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{9}\right) = 3\left(y-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{3}$$

entonces

$$3x^2-2y-2x+3y^2=4 \qquad \Longrightarrow \qquad 3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{3}+3\left(y-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{3}=4,$$

es decir,

$$\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{14}{9}$$

★

Ejemplo 3 : *El triángulo ABC tiene vértices $B(-6,-3)$ y $C(8,-4)$. La pendiente del lado $\overline{AB}$ es $1/2$ y la pendiente del lado $\overline{AC}$ es -2. Encuentre las coordenadas del punto A.*

Solución : Sea $A(x,y)$ el tercer vértice del triángulo, entonces de la hipótesis

$$\text{p : La pendiente del lado } \overline{AB} \text{ es } 1/2,$$

se tiene

$$m_{\overline{AB}} = \frac{y-(-3)}{x-(-6)} = \frac{1}{2}, \qquad \text{es decir,} \qquad \frac{y+3}{x+6} = \frac{1}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad 2(y+3) = x+6 \qquad \Longrightarrow \qquad 2y - x = 0$$

y de la hipótesis

$$\text{q : La pendiente del lado } \overline{AC} \text{ es } -2,$$

se tiene

$$m_{\overline{AC}} = \frac{y-(-4)}{x-8} = -2, \qquad \text{es decir,} \qquad \frac{y+4}{x-8} = -2 \qquad \Longrightarrow \qquad y+4 = -2(x-8) \qquad \Longrightarrow \qquad y + 2x = 12.$$

La solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2y - x = 0 \\ y + 2x = 12 \end{cases}$$

son las coordenadas del vértice A. Resolvemos el sistema usando el método de reducción

$$2\begin{cases} 2y - x = 0 \\ y + 2x = 12 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} 4y - 2x = 0 \\ y + 2x = 12 \end{cases}$$

$$5y \quad = 12 \qquad \Longrightarrow \qquad y = \frac{12}{5},$$

sustituyendo y en la ecuación $2y - x = 0$, se tiene

$$2\left(\frac{12}{5}\right) - x = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x = \frac{24}{5}$$

Luego, las coordenadas del vértice es $A\left(\frac{24}{5}, \frac{12}{5}\right)$. ★

Ejemplo 4 : *Determine el dominio de la función* $f(x) = \dfrac{\sqrt[4]{x}}{6-x^2} - \dfrac{6-x^2}{x}$

Solución : Observemos que f involucra dos funciones que proporcionan condiciones para su definición, a saber

$$\sqrt[4]{(\cdot)} \qquad \text{tiene sentido si y solo si} \qquad (\cdot) \geq 0$$

$$\frac{1}{(\cdot)} \qquad \text{tiene sentido si y solo si} \qquad (\cdot) \neq 0$$

así, para obtener el dominio de f debemos tener en cuente que

1. la función $g(x) = \sqrt[4]{x}$ tiene sentido si y solo si $x \geq 0$
2. la función $h(x) = \dfrac{1}{6-x^2}$ tiene sentido si y solo si $6 - x^2 \neq 0$
3. la función $w(x) = \dfrac{1}{x}$ tiene sentido si y solo si $x \neq 0$

de esto se obtiene que

1. La función $g(x) = \sqrt[4]{x}$ tiene sentido si $x \in [0, \infty) \qquad \Longrightarrow \qquad \text{Dom } g = [0,\infty)$
2. Para obtener los valores de x para los cuales h tiene sentido, es equivalente resolver la igualdad $6 - x^2 = 0$ y la(s) solución(es) de esta ecuación excluirla(s) de $\mathbb{R}$, así,

$$6 - x^2 = 0 \qquad \text{si y solo si} \qquad x = \pm\sqrt{6}$$

Luego, la función $h(x) = \dfrac{1}{6-x^2}$ tiene sentido si $x \in \mathbb{R} - \left\{\pm\sqrt{6}\right\} \qquad \Longrightarrow \qquad \text{Dom } h = \mathbb{R} - \left\{\pm\sqrt{6}\right\}$

3. Similarmente, la función $w(x) = \dfrac{1}{x}$ tiene sentido si $x \in \mathbb{R} - \{0\} \qquad \Longrightarrow \qquad \text{Dom } w = \mathbb{R} - \{0\}$

Por lo tanto,

$$\text{Dom } f = \text{Dom } h \bigcap \text{Dom } g \bigcap \text{Dom } w = (0, \infty) - \left\{\sqrt{6}\right\}$$

★

Ejemplo 5 *: Determine la imagen de la función* $f(x) = \dfrac{3-x}{x-1}$.

Solución : Observemos que la función f puede ser escrita como

$$f(x) = \frac{3-x}{x-1} = \frac{2}{x-1} - 1$$

y además, $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{1\} = (-\infty, 1) \bigcup (1, \infty)$, entonces, hallamos el rango de f, para ello usamos el hecho que $x \in (-\infty, 1) \bigcup (1, \infty)$, es decir,

$$x < 1 \qquad\qquad \text{ó} \qquad\qquad x > 1$$

y por medio de operaciones algebraicas elementales buscamos transformar estas desigualdades en una desigualdad que involucre a $y = \dfrac{2}{x-1} - 1$. Así,

$$\begin{array}{ccc}
x < 1 & & x > 1 \\
\downarrow & \text{Restamos } 1 & \downarrow \\
x - 1 < 0 & & x - 1 > 0 \\
\downarrow & \text{Aplicamos } \dfrac{1}{(\cdot)} & \downarrow \\
 & \scriptstyle\text{(la desigualdad cambia)} & \\
\dfrac{1}{x-1} > 0 & & \dfrac{1}{x-1} < 0 \\
\downarrow & \text{Multiplicamos por } 2 & \downarrow \\
 & \scriptstyle\text{(la desigualdad se mantiene)} & \\
\dfrac{2}{x-1} > 0 & & \dfrac{2}{x-1} < 0 \\
\downarrow & \text{Restamos } 1 & \downarrow \\
\dfrac{2}{x-1} - 1 > -1 & & \dfrac{2}{x-1} - 1 < -1
\end{array}$$

de estas dos últimas desigualdades y como $y = \dfrac{2}{x-1} - 1$, tenemos que

$$y > -1 \qquad\qquad \text{ó} \qquad\qquad y < -1,$$

por lo que, el rango de f es

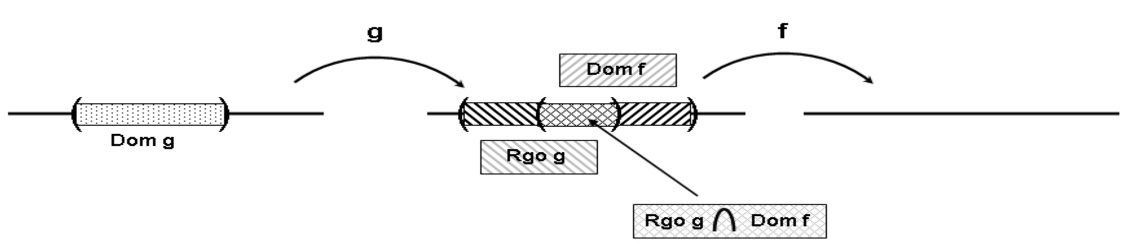
$$\text{Rgo } f = (-\infty, -1) \bigcup (-1, \infty) = \mathbb{R} - \{-1\}$$

★

Ejemplo 6 *: Determine* $f \circ g$ *y su dominio si*

$$f(x) = x^2, \quad x \in (-2, 2) \qquad\qquad y \qquad\qquad g(x) = \sqrt{x^2+1}, \quad x \in (-3, 1)$$

Solución : Es conocido que la composición $f \circ g$ tiene sentido realizarla si y solo si $\text{Rgo } g \bigcap \text{Dom } f \neq \emptyset$



Buscamos el rango de g. Observemos que el dominio natural de la función $g(x)=\sqrt{x^2+1}$ es $\mathbb{R}$, pero en este ejemplo estamos trabajando en una parte de ese domino natural, en el intervalo abierto $(-3,1)$, es decir, en un dominio restringido de g, $\text{Dom } g=(-3,1)$, es decir, $-3<x<1$.

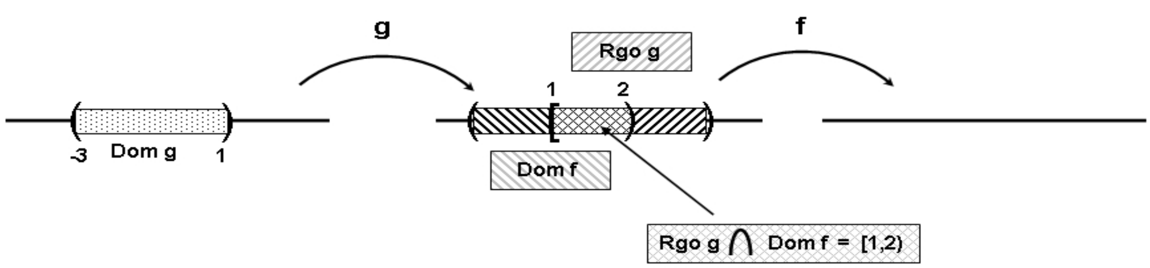
Lo que buscamos son los valores entre los cuales se encuentra y, es decir, por medio de operaciones algebraicas elementales se quiere transformar la desigualdad $-3<x<1$ en una desigualdad que involucre a $y=\sqrt{x^2+1}$, para ello, debemos elevar al cuadrado la desigualdad $-3<x<1$, recordemos que al elevar al cuadrado una desigualdad, la misma cambiará o se mantendrá dependiendo del signo de la expresión (ver guía 1, ejercicios 16 y 17), así

$$\begin{array}{ccccc}
 & & -3<x<1 & & \\
\text{Parte negativa} \swarrow & & & \searrow \text{Parte positiva} & \\
-3<x\leq 0 & & & 0\leq x<1 & \\
\downarrow & & & \downarrow & \text{Elevamos al cuadrado} \\
9>x^2\geq 0 & & & 0\leq x^2<1 & \\
\searrow & & & \swarrow & \text{Tomamos el intervalo mayor} \\
 & & 0\leq x^2<9 & & \\
 & & \downarrow & & \text{Sumamos 1} \\
 & & 1\leq x^2+1<10 & & \\
 & & \downarrow & & \text{Aplicamos } \sqrt{(\cdot)} \\
 & & & & \text{(la desigualdad se mantiene)} \\
 & & \sqrt{1}\leq\sqrt{x^2+1}<\sqrt{10} & &
\end{array}$$

como $\sqrt{1}=1$, entonces el rango de g es $\text{Rgo } g=\left[1,\sqrt{10}\right)$.

Puesto que

$$\text{Rgo } g\bigcap\text{Dom } f=\left[1,\sqrt{10}\right)\bigcap(-2,2)=[1,2)\neq\emptyset$$



se puede realizar la composicón $f\circ g$, la cual viene dada por

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f\left(\sqrt{x^2+1}\right)=\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2=\left|x^2+1\right|=x^2+1$$

la última igualdad se cumple, ya que la expresión x^2+1 es positiva.

Hallemos el dominio de $(f\circ g)(x)=x^2+1$, podemos estar tentado a concluir que el dominio de $f\circ g$ es $\mathbb{R}$ y en realidad no estaríamos errado sino fuera por el hecho que las funciones f y g están definidas en dominios restringidos. Para hallar $\text{Dom } f\circ g$, procedemos de la siguiente manera

$$\begin{array}{ccccccccc}
1\leq\sqrt{x^2+1}<2 & \Longrightarrow & 1\leq x^2+1<4 & \Longrightarrow & 0\leq x^2<3 & \Longrightarrow & 0\leq|x|<\sqrt{3} & \Longrightarrow & -\sqrt{3}<x<\sqrt{3}, \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
 & \text{Elevamos al cuadrado} & & \text{Restamos 1} & & \text{Aplicamos } \sqrt{(\cdot)} & & \begin{array}{c}\text{Por definición}\\ \text{de valor absoluto}\end{array} &
\end{array}$$

por lo tanto,

$$\text{Dom } f\circ g=\left(-\sqrt{3},\sqrt{3}\right)\bigcap\text{Dom } g=\left(-\sqrt{3},\sqrt{3}\right)\bigcap(-3,1)=\left(-\sqrt{3},1\right)\qquad\Longrightarrow\qquad\text{Dom } f\circ g=\left(-\sqrt{3},1\right).$$

★

1. Represente en el plano cartesiano los siguientes pares ordenados

   1. $(-1,2)$ 2. $(2,0)$ 3. $(0,-3)$ 4. $\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$ 5. $(-2,-2)$ 6. $(3,1)$

   7. $\left(\sqrt{2},\pi\right)$ 8. $(-3,0)$ 9. $\left(\dfrac{3}{2},1\right)$ 10. $(3,1)$ 11. $(-1,-5)$ 12. $(-1,0)$

2. Halle el punto medio entre los siguientes puntos

   1. $(0,0),(4,6)$ 2. $(3,0),(6,9)$ 3. $\left(\dfrac{1}{2},4\right),\left(-\dfrac{3}{2},8\right)$ 4. $(-3,2),(1,2)$

   5. $(1,-5),(6,2)$ 6. $(4,1),(6,-2)$ 7. $\left(\dfrac{1}{2},-4\right),\left(-\dfrac{3}{2},2\right)$ 8. $(10,2),(-2,2)$

3. Hallar la distancia entre los puntos del ejercicio 2

4. Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que

   (a) Se conserva siempre a 2 unidades a la izquierda del eje y.
   (b) Está siempre 4 unidades arriba del eje x.
   (c) Está a igual distancia de los ejes x y y.

5. Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que:

   (a) Su abscisa es siempre igual al doble de su ordenada.
   (b) Su ordenada es siempre igual a su abscisa incrementada en 2.
   (c) Su abscisa es siempre igual a la recíproca de su ordenada.

6. Un punto se mueve de tal manera que su distancia al eje y disminuida en 3 es siempre igual al doble de su distancia al eje x. Hallar la ecuación de su lugar geométrico.

7. Un punto se mueve de tal manera que su distancia al origen es siempre igual a 2. Hallar la ecuación de su lugar geométrico.

8. Un punto se mueve de tal manera que su distancia al punto $A(2,3)$ es siempre igual a 5. Hallar la ecuación de su lugar geométrico.

9. Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que se conserva siempre equidistante de los dos puntos $A(1,-2)$ y $B(5,4)$.

10. Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia al punto $P(2,-2)$ es siempre igual a un tercio de su distancia al punto $Q(4,1)$.

11. Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que el cuadrado de su distancia al punto $(4,1)$ es siempre igual a su distancia del eje y.

12. Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia al eje x es igual a 5 veces su distancia del eje y.

13. ¿Qué lugar geométrico describe el punto $P(x,y)$ si su distancia al punto $R(-3,0)$ es cuatro veces su distancia al punto $Q(3,0)$?

14. Un punto se mueve de tal manera que su distancia al eje x es siempre igual a su distancia del punto $A(0,4)$. Hallar la ecuación de su lugar geométrico.

15. Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que la suma de los cuadrados de sus distancias a los dos puntos $A(3,5)$ y $B(-4,2)$ es siempre igual a 30.

16. Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que la diferencia de los cuadrados de sus distancias a los dos puntos $A(2,-2)$ y $B(4,1)$ es siempre igual a 12. (Dos casos)

17. Un punto se mueve de tal manera que su distancia al punto $P(2,4)$ es siempre igual a su distancia del eje y aumentada en 3. Hallar la ecuación de su lugar geométrico.

18. Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que la suma de sus distancias a los dos puntos $P(3,0)$ y $Q(-3,0)$ es siempre igual a 8.

19. Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que la suma de sus distancias a los dos puntos $A(0,3)$ y $B(0,-3)$ es siempre igual a 8. Compare el resultado con el obtenido en el ejercicio 18.

20. Un punto se mueve de tal manera que la diferencia de sus distancias a los dos puntos $R(3,0)$ y $T(-3,0)$ es siempre igual a 4. Hallar la ecuación de su lugar geométrico.

21. Un punto se mueve de tal manera que la diferencia de sus distancias a los dos puntos $R(0,3)$ y $T(0,-3)$ es siempre igual a 4. Hallar la ecuación de su lugar geométrico. Compare el resultado con el obtenido en el ejercicio 20.

22. Un punto se mueve de tal manera que su distancia al punto $A(3,1)$ es siempre igual a la mitad de su distancia al eje y. Hallar la ecuación de su lugar geométrico.

23. Un punto se mueve de tal manera que su distancia al punto $A(-1,2)$ es siempre el doble de su distancia al eje x. Hallar la ecuación de su lugar geométrico.

24. Un segmento rectilíneo de longitud 4 se mueve de tal manera que uno de los puntos extremos permanece siempre sobre el eje x y el otro permanece siempre sobre el eje y. Hallar la ecuación del lugar geométrico del punto medio del segmento.

25. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya suma de los cuadrados de sus distancias a los tres puntos $A(0,3)$, $B(3,0)$ y $C(-2,-2)$ es siempre igual a 30.

26. Diga el ángulo de inclinación de cada una de las siguientes rectas dirigidas: **a)** el eje x, **b)** el eje y, **c)** una recta paralela al eje x y dirigida hacia la derecha, **d)** una recta paralela al eje x y dirigida hacia la izquierda.

27. Diga la pendiente de cada una de las siguientes rectas dirigidas: **a)** el eje x, **b)** la recta paralela al eje x y dirigida ya sea a la derecha o a la izquierda, **c)** la recta que pasa por el origen y biseca al 1$^{\text{er}}$ cuadrante, **d)** la recta que pasa por el origen y biseca al cuadrante II.

28. Hallar la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos $P(-3,2)$ y $Q(7,-3)$.

29. Hallar la ecuación que debe satisfacer cualquier punto $P(x,y)$ que pertenezca a la recta que pasa por el punto $A(3,-1)$ y que tiene una pendiente igual a 4.

30. Encuentre la ecuación pendiente-intersección de la recta que pasa por los puntos dados

1. $(0,0), (4,6)$	2. $(3,0), (6,9)$	3. $\left(\frac{1}{2},4\right), \left(-\frac{3}{2},8\right)$	4. $(-3,2), (1,2)$
5. $(1,-5), (6,2)$	6. $(4,1), (6,-2)$	7. $\left(\frac{1}{2},-4\right), \left(-\frac{3}{2},2\right)$	8. $(10,2), (-2,2)$

31. Hallar el ángulo de inclinación de las rectas obtenidas en el ejercicio 30

32. Determine $P_2(x_2,y_2)$ empleando la información dada.

1. $P_1(-3,2)$, $\triangle x = 4$, $\triangle y = 6$	2. $P_1(0,5)$, $\triangle x = 0$, $\triangle y = -4$
3. $P_1(3,-2)$, $\triangle x = 2$, $\triangle y = \frac{1}{2}$	4. $P_1(0,7)$, $\triangle x = -2$, $\triangle y = -3$

33. Halle una ecuación de la recta que satisfaga las condiciones dadas

(a) Pasa por $(2,1)$, pendiente -3 (b) Pasa por $(8,-7/2)$, pendiente 0

(c) Pasa por $(5,-2)$ y $(1,2)$ (d) Pendiente 4 y pasa por $(2,-3)$

(e) Pasa por $(3,-1)$ y $(3,5)$ (f) Abscisa en el origen igual a 4, pendiente -2

(g) Ordenada en el origen (intersección con y) igual a 6, pendiente 2

(h) Pasa por $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$, abscisa en el origen (intersección x) igual a $-\frac{1}{6}$

(i) Pendiente 0 y pasa por $(-5,-1/2)$

(j) Intersección eje x es -3 y con el eje y es 4

(k) Pasa por $(1,3)$, $\triangle x=3$, $\triangle y=9$

(l) Pasa por $(-3,-4)$ y es paralela al eje x

(m) Tiene iguales intersecciones con los ejes y pasa por $(8,-6)$

(n) Pasa por $(1/2,-1)$, perpendicular a $3x+4y-12=0$

(o) Tiene un ángulo de inclinación igual a $\dfrac{\pi}{6}$ y abscisa en el origen igual a -3

(p) Pasa por $\left(-\dfrac{7}{3},\dfrac{3}{8}\right)$, paralela al eje y

(q) Pasa por $(9,3)$, pendiente indefinida

(r) Abscisa en el origen $\dfrac{1}{3}$, ordenada en el origen 2

(s) Pasa por $(1,2)$, paralela a $2x+3y=6$

(t) Pasa por $(4,4)$, paralela a $x-3y=0$

(u) Pasa por $(-3,-4)$ y es paralela al eje y

(v) Pasa por $(2,3)$ y por el punto común a $x+y=1$ y $2x+y=5$

(w) Pasa por $(4,2)$ paralelamente a la recta que pasa por $(5,1)$ y $(-1,7)$

(x) Pasa por el punto común a $2x+3=0$ y $y+6=0$, pendiente -2

34. Una recta pasa por los dos puntos $T(-2,-3)$, $U(4,1)$. Si un punto de abscisa 10 pertenece a la recta, ¿cuál es su ordenada?.

35. Una recta de pendiente 3 pasa por el punto $P(3,2)$. La abscisa de otro punto de la recta es 4. Hallar su ordenada.

36. ¿Cuál es la pendiente de una recta si cruza el eje x en 6 y el eje y en -2?

37. Una recta con pendiente -3 cruza el eje x en $(8,0)$. ¿En qué punto cruza el eje y?

38. Una recta con pendiente -1 contiene a $P(5,-2)$. Encuentre x si la recta también contiene al punto $(x,8)$

39. Encuentre y de manera que la recta que pasa por $(-4,-3)$ y $(8,y)$ sea paralela a la recta que pasa por $(4,-4)$ y $(3,5)$.

40. Encuentre y de manera que la recta que pasa por $(-2,-1)$ y $(10,y)$ sea perpendicular a la recta que pasa por $(6,-2)$ y $(5,7)$.

41. Una recta de pendiente -2 pasa por el punto $(2,7)$ y por los puntos A y B. Si la ordenada de A es 3 y la abscisa de B es 6. ¿Cuál es la abscisa de A y la ordenada de B?

42. Encuentre el área de un triángulo formado por los ejes x y y y la recta $y=x-5$.

43. Demostrar que la recta que pasa por los dos puntos $A(-2,5)$ y $B(4,1)$ es perpendicular a la que pasa por los dos puntos $C(-1,1)$ y $D(3,7)$.

44. Una recta l_1 pasa por los puntos $A(3,2)$ y $B(-4,-6)$ y otra recta l_2 pasa por el punto $C(-7,1)$ y el punto D cuya ordenada es -6. Hallar la abscisa del punto D, sabiendo que l_1 es perpendicular l_2.

45. Calcular el valor de A y B de la recta $Ax+By+38=0$, si debe pasar por los puntos $P(-3,1)$ y $Q(1,6)$.

46. Si las coordenadas de A y B son $(0,4)$ y $(-5,1)$ y si el lado $\overline{AB}$ es perpendicular a $\overline{AC}$, encuentre el punto en el que $\overline{AC}$ cruza el eje x

47. Determinar las ecuaciones de las rectas de pendiente igual a $-\frac{3}{4}$ que forman con los ejes coordenadas un triángulo de área igual a 24 unidades cuadradas.

48. Calcular la ecuación de la recta que pasa por $D(4,4)$ y determine con los ejes coordenados un segmento de $6\sqrt{5}$ unidades de longitud.

49. Determine a de manera que la recta que pasa por $(7,1)$ y $(4,8)$ sea paralela a la recta que pasa por $(2,a)$ y $(a,-2)$.

50. Determine b de manera que la recta que pasa por $(2,3)$ y $(4,-5)$ sea perpendicular a la recta que pasa por $(4,-5)$ y (b,b).

51. ¿Cuál es la abscisa en el origen de una recta de pendiente igual a -3 y ordenada en el origen igual a 4?

52. Las coordenadas de los puntos A, B y C son $(-3,2)$, $(4,-2)$ y $(0,6)$, respectivamente. Encuentre D de manera que $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y D esté sobre el eje x.

53. Halle una ecuación de la recta que pasa por los puntos medios de los segmentos rectilineos comprendidos entre las intersecciones x y y de $3x+4y=12$ y $x+y=-6$.

54. Halle una ecuación de la recta que pasa por el punto medio del segmento de recta que va de $(-1,3)$ a $(4,8)$ y es perpendicular al segmento.

55. Determinar las condiciones necesarias para que las rectas $L_1 : Kx + \dfrac{y}{K} - K = 0$ y $L_2 : Ax - Ky + K = 0$ sean perpendiculares.

56. Dada la recta $K^2x + (K+1)\,y + 3 = 0$, determinar los valores de K y las ecuaciones correspondientes de dichas rectas, si debe ser perpendicular a la recta $4x - 2y - 11 = 0$.

57. Trace la gráfica de la recta que tenga la ecuación dada. Determine la pendiente y las coordenadas en el origen.

    1. $y = 2x - 1$;   2. $y = -\dfrac{1}{2}x$;   3. $2y + 5 = 0$;   4. $x - 2 = 0$;   5. $y = -2x + 5$;

58. Trace la gráfica de la recta que pasa por $(2,1)$ y tiene pendiente igual a $-2/5$.

59. El punto $(-2,3)$ ¿Está arriba o abajo de la recta $y + 5x = 2$?

60. Halle el valor de k de tal forma que la gráfica de la ecuación lineal dada satisfaga la condición indicada

    (a) $kx + 3y = 1$, pasa por $(5,1)$

    (b) $x - ky + 3 = 0$, ordenada en el origen -4

    (c) $kx + \sqrt{3}y = k$, pendiente $\sqrt{3}$

    (d) $2x + ky + 1 = 0$, perpendicular a $-5x + 10y = 3$

    (e) $kx + y = 0$, paralela a $3x - 7y = 12$

    (f) $-x + 7y = k$, abscisa en el origen $3/2$

61. Encuentre las coordenadas del punto de intersección. Después escriba la ecuación de la recta que pasa por ese punto y sea perpendicular a la primera de las rectas dadas

    1. $\begin{cases} y - 5 = 0 \\ y = -4x - 3 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 2x + 5y = 19 \\ -7x + 2y = -8 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} 5x - 2y = 5 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} 6x = 5y + 6 \\ 26x + 15y = 4 \end{cases}$

    5. $\begin{cases} 5y - 2x = 17 \\ x + 3y = 8 \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 3x + 2y = -5 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 7 \end{cases}$ 7. $\begin{cases} 3y - 7x = 41 \\ 5x + y = 5 \end{cases}$

62. Determine si los puntos dados son colineales: **a)** $(0,-4)$, $(1,-1)$, $(3,5)$; **b)** $(-2,3)$, $(1,3/2)$, $\left(-1,\frac{1}{2}\right)$.

63. Dados los puntos $P\,(4,2)$, $Q\,(-2,-1)$ y $R\,(6,3)$. Verificar que los tres puntos pertenecen a la misma recta, es decir, son colineales.

64. Si los puntos $A\,(-1,a)$, $B\,(a,1)$ y $C\,(3a,-a)$ son colineales, siendo $a > 0$. Determinar el valor de a.

65. Dados los puntos $A\,(4,2)$, $B\,(-2,6)$ y $C\,(2,-4)$, obtener la ecuación de la recta que:

    1. Pasa por B, es paralela a $\overline{AC}$
    2. Pasa por B y es paralela al eje x
    3. Pasa por A, es perpendicular a $\overline{BC}$
    4. Pasa por C y por el punto medio de $\overline{AB}$
    5. Pasa por A, es paralela al eje y

66. Escriba la ecuación de la recta que pasa por $(0,-2)$ y que es perpendicular a la recta $2y + x + 3 = 0$.

67. Determinar el valor de K para que los puntos $A\,(1,3)$, $B\,(5,7)$ y $C\,(2,K)$ sean colineales.

68. Encuentre el valor de k para el cual la recta $3x + ky = -6$

    (a) pasa por el punto $(1,2)$

    (b) es paralela al eje y

    (c) es paralela a la recta $6y - 9x = 10$

    (d) tiene intersecciones en x y y iguales

    (e) es perpendicular a la recta $y + 2 = 2\,(x-4)$

69. Use la pendiente para verificar que los puntos P_1, P_2 y P_3 son vértices de un triángulo rectángulo.

1. $P_1(8,2)$, $P_2(1,-11)$, $P_3(-2,-1)$
2. $P_1(8,2)$, $P_2(-3,0)$, $P_3(5,6)$

70. Determinar la ecuación de la recta que interceptando sobre el eje x un segmento de 7 unidades de longitud, pasa además por el punto de abscisa igual a 4 perteneciente a la recta $5x+3y-30=0$.

71. Calcular los valores de M y N si las ecuaciones $Mx-7y+18=0$ y $8x-Ny+9M=0$ representan la misma recta.

72. Dada la recta $L_1: 3x-2y+4=0$ y el punto $A(1,3)$, encontrar la ecuación de la recta que pasa por A y es perpendicular a L_1.

73. Escribir la ecuación de la recta que pasa por $A(-2,1)$ y que:

1. Es paralela a $3x-2y=5$
2. Es perpendicular a $3x+4y-9=0$
3. Pasa por $B(7,3)$
4. Es perpendicular a $y=4$
5. Tiene como ordenada en el origen 3

74. Encontrar la ecuación de dos rectas que se cortan en el punto $P(-4,3)$, tales que la suma algebraica de sus ordenadas en el origen sea igual a -2 y la suma algebraica de sus abscisas en el origen sea nula.

75. ¿Cuáles de los puntos $P_1(-3,0)$; $P_2(6,3)$ y $P_3(1,1)$ están sobre la recta que pasa por $A(3,2)$ y $B(-6,-1)$.

76. Sea $A(3,k)$ un punto sobre la recta de pendiente igual a 5 y que pasa por $B(-2,4)$. Determinar el valor de k.

77. Una recta de pendiente 2 pasa por el punto $A(1,3)$. Si la abscisa de un punto de la recta es 3, hallar su ordenada.

78. Una recta de pasa por los puntos $A(1,3)$ y $B(5,7)$ contiene un punto de ordenada igual a -1, ¿cuál es la abscisa de dicho punto?

79. Hallar la ecuación de la recta que cumple con las condiciones indicadas en cada caso:

(a) La pendiente es igual a 4 y pasa por el punto $A(2,-3)$.
(b) Pasa por el punto $B(-1,-2)$ y tiene pendiente igual a 2.
(c) Pasa por el punto $A(2,1)$ y tiene pendiente igual a cero.
(d) Pasa por el punto $B(-1,2)$ y tiene pendiente infinita.
(e) Pasa por el punto $D(1,-7)$ y es paralela al eje x.
(f) Pasa por el punto $P(-3,-4)$ y es paralela al eje y.
(g) Pasa por los puntos $P(3,1)$ y $Q(-5,4)$.
(h) Pasa por el punto $A(-6,-3)$ y tiene un ángulo de inclinación de $45°$.
(i) Pasa por el punto $A(-1,4)$ y forma un ángulo de $60°$ con el eje x.
(j) Corta al eje x en el punto $K(3,0)$ y al eje y en el punto $M(0,-4)$.
(k) Su pendiente es igual a 2 y su ordenada en el origen es la misma que la de la recta $3x+4y+12=0$.
(l) La intersección con el eje x es igual a -3 y con el eje y es igual a 4.
(m) La pendiente es -4 y la intersección con el eje x es igual a 2.
(n) Pasa por el punto $P(1,2)$ y es paralela a la recta $x+2y-3=0$.
(o) Pasa por el punto $N(-3,1)$ y es paralela a la recta determinada por $P(1,-5)$ y $Q(-2,1)$.
(p) Pasa por el punto $A(1,4)$ y es paralela a la recta cuya ordenada en el origen es igual a 2 y pasa por el punto $B(1,3)$.
(q) Pasa por el punto $S(7,8)$ y es paralela al segmento que definen $T(-2,1)$ y $U(3,-4)$.
(r) Pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a $3x+4y-1=0$.
(s) Pasa por el punto $P(-3,1)$ y es perpendicular a la recta determinada por los puntos $Q(-2,1)$ y $R(-4,5)$.
(t) Pasa por el punto $(-1,3)$ y es perpendicular a la recta $2x+3y+5=0$.
(u) Forma un ángulo de $0°$ con el eje x y corta el eje y en un punto distante 5 unidades del origen de coordenadas.
(v) La intersección con el eje y es igual a cero y forma un ángulo de $45°$ con el eje x.

(w) La ordenada en el origen es igual a 2 y la intersección con el eje x es igual a -4.

(x) Es perpendicular al eje y y pasa por el punto $P(-4,1)$.

(y) Pasa por $C(5,-2)$ y tiene un ángulo de inclinación igual a $\dfrac{\pi}{2}$.

80. Encuentre el valor de k tal que la recta $kx - 3y = 10$

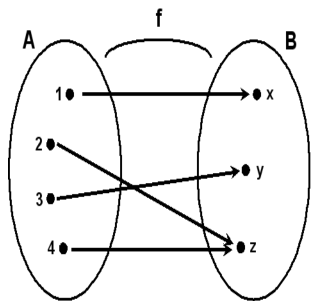
(a) es perpendicular a la recta $y = 2x + 4$ (b) es paralela a la recta $y = 2x + 4$

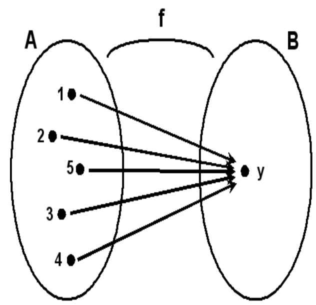
(c) es perpendicular a la linea $2x + 3y = 6$ (d) tiene intersecciones en x y y iguales

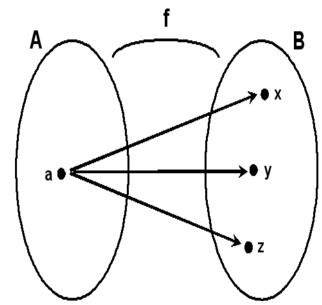
81. Dado el triángulo de vértices $A(1,7)$, $B(4,-2)$ y $C(5,5)$, verifique que la recta que une los puntos medios de dos de sus lados es paralela al tercer lado.

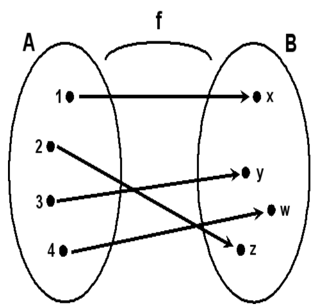
82. El triángulo ABC tiene vértices $B(-6,-3)$ y $C(8,-4)$. La pendiente del lado $\overline{AB}$ es $1/2$ y la pendiente del lado $\overline{AC}$ es -2. Encuentre las coordenadas del punto A.

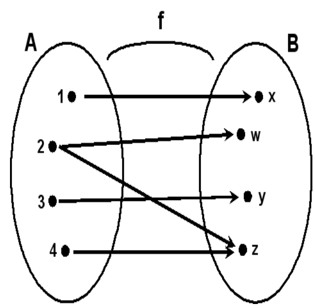
83. Diga cual de las siguientes relaciones representa una función. Justifique su respuesta.

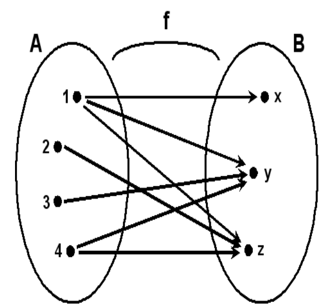
(a)


(b)


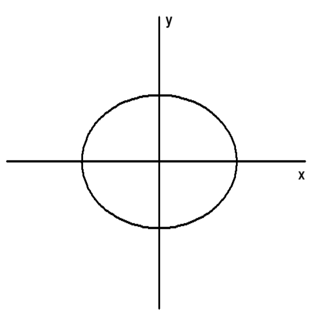
(c)


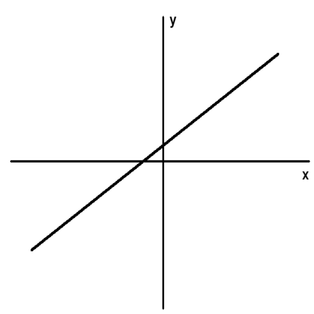
(d)


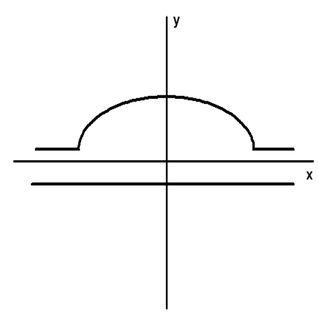
(e)


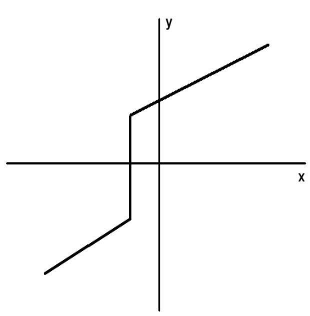
(f)


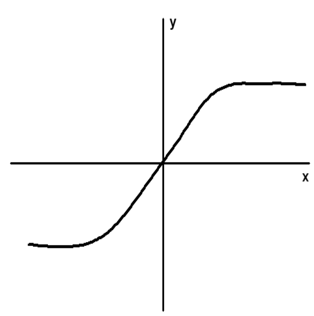
84. Diga cual de las siguientes graficas representa una función. Justifique su respuesta.

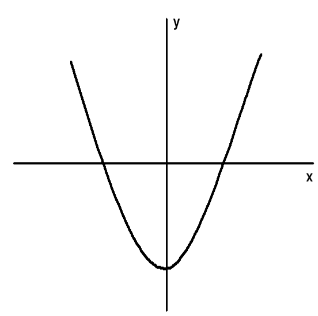
(a)


(b)


(c)


(d)


(e)


(f)


85. Sea $f(x) = 4 - 5x$. Calcular: **a)** $f(-1)$; **b)** $-f(1)$; **c)** $3 - f(2/5)$; **d)** $\dfrac{1 - f(0)}{f(3/5) - 2}$;

86. Sea $f(x) = 2 - 3x^2$. Calcular: **a)** $f(2)$; **b)** $-f(3)$; **c)** $1 - f(3/5)$; **d)** $\dfrac{1 - f(-2)}{f(4/3)}$;

87. Sea $f(x) = x^2 + 4$. Calcular: **a)** $2f(1/2)$; **b)** $\dfrac{-f(1)}{2}$; **c)** $\dfrac{3 - f(-2)}{f(3/2)}$; **d)** $-5 + \dfrac{f(2)}{f(2/3)}$;

88. Sea $f(x) = x - x^2$. Calcular: **a)** $f(h-1)$; **b)** $f(x+h)$; **c)** $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$, con $h \neq 0$;

89. Sea $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{3-x}}$. Calcular: **a)** $f(2+h)$; **b)** $f(x+h)$; **c)** $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$, con $h \neq 0$;

90. Determine **a)** $f(2-h)$; **b)** $f(x+h)$; **c)** $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$, con $h \neq 0$;

1. $f(x) = 2 - 3x^2$ 2. $f(x) = \dfrac{x}{2-x}$ 3. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ 4. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x-3}}$

91. Si $f(x) = x^3$. Hallar $\dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$.

92. Si $g(x) = x + \dfrac{1}{x}$. Hallar $\dfrac{g(b) - g(a)}{b-a}$.

93. Dada la función $h(x) = x^3 - 2x - 5$. Hallar $\dfrac{h(b) - h(a)}{b-a}$.

94. Dada $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$. Hallar $\dfrac{f(b) - f(a)}{1 + f(a)f(b)}$.

95. Sea $f(t) = at^2 + bt + c$, verificar que $f(t+3) - 3f(t+2) + 3f(t+1) - f(t) = 0$.

96. Determine el dominio de la función dada

1. $f(x) = \sqrt{x-2}$ 2. $g(x) = \sqrt{3-x}$ 3. $h(x) = \sqrt{-x}$ 4. $f(x) = \sqrt{x^2+9}$

5. $h(x) = \sqrt{x^3-1}$ 6. $f(t) = \sqrt[3]{t+4}$ 7. $f(t) = \sqrt{2+t^2}$ 8. $h(t) = \sqrt[4]{t^2-6t}$

9. $f(x) = \sqrt[4]{x^2+x}$ 10. $h(t) = \sqrt{t^8+t^2}$ 11. $f(t) = \sqrt[3]{t-1}$ 12. $f(x) = \sqrt{27-x^3}$

13. $f(x) = \dfrac{1}{3-x^2}$ 14. $f(x) = \dfrac{2}{x^2+8}$ 15. $h(x) = \dfrac{1}{x^4+1}$ 16. $f(x) = \dfrac{x}{x^3-8}$

17. $g(x) = \dfrac{1}{x^3-27}$ 18. $h(x) = \dfrac{1}{x^4+27}$ 19. $f(x) = |2x+5|$ 20. $f(x) = \dfrac{1}{|x-1|}$

21. $f(x) = \sqrt[3]{-x}$ 22. $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{-x}}$ 23. $h(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t^2-1}}$ 24. $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^4}}$

25. $g(t) = \sqrt{t^8-t^2}$ 26. $h(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t^8-t^2}}$ 27. $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x}{x+5}}$ 28. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+2}{x-3}}$

29. $h(x) = \sqrt{\dfrac{x^3-x}{16-x^2}}$ 30. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-2x}{x-1}}$ 31. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-7x}{x^2-5x+6}}$

32. $f(x) = \sqrt{\dfrac{|1-x|}{x^2-6x+5}}$ 33. $f(x) = \sqrt{\left|\dfrac{2-3x}{1+2x}\right| - 4}$ 34. $y = \sqrt{\dfrac{|9-x^2|+9}{|3x|} - 1}$

35. $f(x) = \sqrt[4]{\dfrac{1-|x-1|}{x^2+3x+2}}$

97. Determine: **a)** $f+g$; **b)** fg; **c)** f/g; **d)** Dominio natural de cada una

1. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-2}{x+3}}$, $g(x) = \sqrt[4]{7-3x}$ 2. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{16-x^2}}$, $g(x) = \sqrt{\dfrac{x^2+2x}{|x^3-8|}}$

3. $f(x) = \dfrac{1}{x-1}, \quad g(x) = \dfrac{1}{2x+1}$

4. $f(x) = \sqrt{-x}, \quad g(x) = \sqrt{x+2}$

5. $f(x) = |x|, \quad g(x) = \sqrt{3-|x|}$

6. $f(x) = \dfrac{1}{|x^2-4|}, \quad g(x) = \sqrt{5-x}$

98. Determine la imagen de la función dada en el intervalo indicado

1. $\begin{cases} f(x) = 2x-5, \\ -1 \le x \le 6 \end{cases}$
2. $\begin{cases} f(x) = \sqrt{4-3x} \\ -2 \le x < 1 \end{cases}$
3. $\begin{cases} f(x) = 2x^2-3, \\ -5 \le x \le 1 \end{cases}$
4. $\begin{cases} f(t) = \dfrac{-4}{t^3+\sqrt{t}} \\ 1 < t \le 4 \end{cases}$
5. $\begin{cases} f(x) = 2x+7, \\ -1 \le x \le 6 \end{cases}$
6. $\begin{cases} f(x) = 3-5x, \\ -4 \le x < 2 \end{cases}$
7. $\begin{cases} f(x) = \dfrac{2}{x-3}, \\ 4 < x < 9 \end{cases}$
8. $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{2-\sqrt{4x}} \\ 0 \le x < 4 \end{cases}$
9. $\begin{cases} f(x) = x^2-1, \\ -6 \le x \le 3 \end{cases}$
10. $\begin{cases} f(x) = \dfrac{5}{4-x^2}, \\ -4 < x \le -1 \end{cases}$
11. $\begin{cases} y = \dfrac{-2}{x^2+x}, \\ 1 < x < 5 \end{cases}$
12. $\begin{cases} f(t) = \sqrt[3]{t^2-t}+t \\ -4 < t < -1 \end{cases}$
13. $\begin{cases} f(x) = \dfrac{2}{10-x} \\ -2 \le x \le 2 \end{cases}$
14. $\begin{cases} y = \dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x}+x} \\ -27 < x < -8 \end{cases}$
15. $\begin{cases} y = \dfrac{3}{\sqrt{5-x^2}} \\ -2 \le x < -1 \end{cases}$
16. $\begin{cases} f(t) = \left(3-\sqrt{t-2}\right)^2 \\ 18 \le t \le 27 \end{cases}$

99. Determine el dominio y la imagen de la función dada

1. $y = 1-\sqrt{-x}$
2. $y = \dfrac{-2}{x-3}$
3. $y = 3-x^2$
4. $y = \sqrt{4-x^2}$
5. $y = \dfrac{1}{x^2+9}$
6. $y = \dfrac{1}{x+4}$
7. $y = 1-\sqrt{x}$
8. $y = \sqrt{2x-5}$
9. $y = x^2-9$
10. $y = \sqrt{6-x}$
11. $y = \dfrac{1}{x^2-9}$
12. $y = \sqrt{9-x^2}$
13. $y = \dfrac{1}{(x-3)^2}$
14. $y = \dfrac{1}{3-2x}$
15. $y = \dfrac{x}{x-9}$
16. $y = 2-\sqrt{3x}$
17. $y = \sqrt{9+4x}$
18. $y = \sqrt{9x^2-4}$

100. Determine el dominio de la función

1. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x-5}}$
2. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-5}}$
3. $f(x) = \sqrt{x(x-5)}$
4. $f(x) = \sqrt{x}\,\sqrt{x-5}$
5. $f(x) = \sqrt{x}+\sqrt{x-5}$
6. $h(t) = \dfrac{\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{t-2}}$
7. $h(t) = \sqrt{1-t^2}+\sqrt{t-2}$
8. $h(t) = \sqrt{\dfrac{1-t^2}{t-2}}$
9. $h(t) = \sqrt{1-t^2}\,\sqrt{t-2}$
10. $h(t) = \sqrt{(1-t^2)(t-2)}$
11. $g(x) = \dfrac{\sqrt{4-x}-\sqrt{3+x}}{x^2-2}$
12. $g(x) = \dfrac{\sqrt{4-x}-\sqrt{3+x}}{\sqrt[3]{x^2-2}}$
13. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+x}}{x}$
14. $g(x) = (x+2)\sqrt{-x}$
15. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}-1}+\dfrac{\sqrt[4]{x}}{3-x}$
16. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}-\dfrac{x^2+1}{x}$
17. $f(x) = \dfrac{\sqrt[4]{x}}{6-x^2}-\dfrac{6-x^2}{x}$
18. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x^2-9}}$
19. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-9}}$
20. $f(x) = \dfrac{8-x^3}{\sqrt{-x}+2}$
21. $h(x) = \dfrac{x^2-\sqrt[4]{x-4}+\pi}{\sqrt{16-x}}$
22. $f(x) = \dfrac{27-x^3}{\sqrt{|x^2+3x+2|}}$
23. $f(x) = \sqrt{\dfrac{8-x^3}{\sqrt{-x}+2}}$
24. $f(x) = \sqrt[3]{\sqrt{x}+1}$
25. $f(x) = \sqrt{4-\sqrt{x+1}}$

26. $f(x)=\sqrt[5]{4-\sqrt{x+1}}$ 27. $f(x)=\dfrac{3x^4-1}{\sqrt{1-\sqrt{x+3}}}$ 28. $f(x)=\left(\dfrac{\sqrt{2-x}}{\sqrt[4]{x^2-x}}\right)^{1/3}$

29. $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-9}{\sqrt[7]{x^3-1}}}$ 30. $f(x)=\sqrt{\left|\dfrac{x^2-9}{x^3-1}\right|}$ 31. $f(x)=\dfrac{\sqrt{|x^2-9|}}{\sqrt{|x^3-1|}}$

101. Determine $f\circ g$ y su dominio

1. $\begin{cases} f(x)=x+3, & x\in[-1,1] \\ g(x)=x^2-1, & x\in[-5,5] \end{cases}$ 2. $\begin{cases} f(x)=x^2, & x\in(-2,2) \\ g(x)=\sqrt{x^2+1}, & x\in(-3,1) \end{cases}$ 3. $\begin{cases} f(x)=1/\sqrt{x}, & x\in\mathbb{R}^+ \\ g(x)=x^2-4x, & x\in\mathbb{R} \end{cases}$

4. $\begin{cases} f(x)=x^3, & x\in\mathbb{R} \\ g(x)=1/x, & x\in\mathbb{R}-\{0\} \end{cases}$ 5. $\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{x-1}, & x\in\mathbb{R}-\{1\} \\ g(x)=\dfrac{x-1}{x+1}, & x\in\mathbb{R}-\{-1\} \end{cases}$ 6. $\begin{cases} f(x)=x^2+2x, & x\in\mathbb{R} \\ g(x)=\sqrt{x}, & x\in[0,\infty) \end{cases}$

102. Dadas las funciones

$$F(x)=\sqrt{x-6}, \qquad G(x)=x^2+2 \qquad \text{y} \qquad H(x)=\sqrt{2x+1}.$$

Hallar $F(G(H(x)))$

103. Si $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$ y $g(x)=\dfrac{x-1}{x}$, resolver la ecuación $|f(g(x))|=|g(f(x))|$.

104. Si $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$, $g(x)=\dfrac{x}{1+x}$, $h(x)=\dfrac{x-1}{x}$, $l(x)=3x^4-5x^2$ y $j(x)=x^2$. Hallar

1. $f\left(f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$ 2. $g\left(h\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$ 3. $l(-j(-x))$ 4. $f(g(l(x)))$ 5. $h(j(f(g(-2x))))$

105. Hallar las funciones que al componerlas se obtenga

1. $f(x)=\sqrt[3]{\sqrt{x}+1}$ 2. $f(x)=-\sqrt[3]{\sqrt{x-5}-2}$ 3. $f(x)=\sqrt{4-\sqrt{x+1}}$

4. $h(x)=\dfrac{1}{1-\sqrt{x+3}}$ 5. $h(x)=3-\dfrac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+5}$ 6. $g(x)=\left(x^2-5x+6\right)^6$

106. Sea $f(x)=\dfrac{x-3}{x+1}$. Demuestre que $f(f(f(x)))=x$, siempre y cuando $x\neq\pm1$.

Respuestas: Ejercicios

2.1. $(2,3)$; 2.2. $\left(\frac{9}{2},\frac{9}{2}\right)$; 2.3. $\left(-\frac{1}{2},6\right)$; 2.4. $(-1,2)$; 2.5. $\left(\frac{7}{2},-\frac{3}{2}\right)$; 2.6. $\left(5,-\frac{1}{2}\right)$; 2.7. $\left(-\frac{1}{2},-1\right)$;
2.8. $(4,2)$; 3.1. $2\sqrt{13}$; 3.2. $3\sqrt{10}$; 3.3. $2\sqrt{37}$; 3.4. 4; 3.5. $\sqrt{74}$; 3.6. $\sqrt{13}$; 3.7. $2\sqrt{10}$;
3.8. 12; 4.a. $x=-2$; 4.b. $y=4$; 4.c. $y=\pm x$; 5.a. $x=2y$; 5.b. $y=x+2$; 5.c. $x=\frac{1}{y}$;
6. $y=2x+3$; 7. $x^2+y^2=4$; 8. $(x-2)^2+(y-3)^2=25$; 9. $3y+2x-9=0$;
10. $(x-1)^2+\left(y-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{39}{4}$; 11. $(y-1)^2+\left(x-\frac{9}{2}\right)^2=\frac{17}{4}$; 12. $y=5x$; 13. $(x-5)^2+y^2=16$;
14. $y=\frac{x^2}{8}+2$; 15. $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$; 16. $4x+6y-21=0$ y $4x+6y+3=0$;
17. $(x-2)^2=14y-7$; 18. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$; 19. $\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{16}=1$; 20. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$; 21. $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{5}=1$;
22. $\frac{(x-4)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{3}=1$; 23. $9\left(y+\frac{2}{3}\right)^2-3(x+1)^2=16$; 24. $x^2+y^2=8$; 25. $\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{14}{9}$;
26.a. $\alpha=0$; 26.b. $\alpha=\frac{\pi}{2}$; 26.c. $\alpha=0$; 26.d. $\alpha=\pi$; 27.a. 0; 27.b. 0; 27.c. 1; 27.d. -1;
28. Pendiente : $-\frac{1}{2}$, $\alpha=\frac{2\pi}{3}$; 29. $y=4x-13$; 30.1. $y=\frac{3}{2}x$; 30.2. $y=\frac{3}{2}x-\frac{9}{2}$; 30.3. $y=5-2x$;
30.4. $y=2$; 30.5. $y=\frac{7}{5}x-\frac{32}{5}$; 30.6. $y=7-\frac{3}{2}x$; 30.7. $y=-3x-\frac{5}{2}$; 30.8. $y=3$; 31.1. $\alpha=\arctan\left(\frac{3}{2}\right)$;
31.2. $\alpha=\arctan\left(\frac{3}{2}\right)$; 31.3. $\alpha=-\arctan(2)$; 31.4. $\alpha=0$; 31.5. $\alpha=\arctan\left(\frac{7}{5}\right)$; 31.6. $\alpha=-\arctan\left(\frac{3}{2}\right)$;
31.7. $\alpha=-\arctan(3)$; 31.8. $\alpha=0$; 32.1. $P_2(-7,-4)$ ó $P_2(1,6)$; 32.2. $P_2(0,9)$ ó $P_2(0,1)$;
32.3. $P_2\left(5,-\frac{3}{2}\right)$ ó $P_2\left(1,-\frac{5}{2}\right)$; 32.4. $P_2(-2,4)$ ó $P_2(2,10)$; 33.a. $y=7-3x$; 33.b. $y=-\frac{7}{2}$; 33.c. $y=3-x$;
33.d. $y=4x-11$; 33.e. $x=3$; 33.f. $y=8-2x$; 33.g. $y=2x+6$; 33.h. $6x+16y+1=0$; 33.i. $y=-\frac{1}{2}$;
33.j. $4x-3y+4=0$; 33.k. $y=3x$; 33.l. $y=-4$; 33.m. $y=2-x$; 33.n. $3y-4x+5=0$;

33.*o*. $\sqrt{3}x - 2y + 3\sqrt{3} = 0$; 33.*p*. $x = -\frac{7}{3}$; 33.*q*. $x = 9$; 33.*r*. $y = 2 - 6x$; 33.*s*. $2x + 3y - 8 = 0$;

33.*t*. $x = 3y - 8$; 33.*u*. $x = -3$; 33.*v*. $y = 9 - 3x$; 33.*w*. $y = 6 - x$; 33.*x*. $y = -2x - 9$; 34. 5;

35. 5; 36. $\frac{1}{3}$; 37. 24; 38. -1; 39. 105; 40. -109; 41. $x = 4, \quad y = -1$;

42. $\frac{25}{2}$; 44. 1; 45. $A = 14, \quad B = 4$; 46. $\frac{12}{5}$; 47. $y = 8 - \frac{3}{4}x, \quad y = -8 - \frac{3}{4}x$;

48. $y = 12 - 2x$, y $y = 6 - \frac{1}{2}x$; 49. 5; 50. $\frac{11}{5}$; 51. $\frac{4}{3}$; 52. $D\left(\frac{21}{2}, 0\right)$; 53. $10y - 9x + 3 = 0$;

54. $y = 7 - x$; 55. $K = \frac{1}{A}, \quad A \neq 0$; 56. $K = 1 \Longrightarrow x + 2y + 3 = 0$, y $K = -\frac{1}{2} \Longrightarrow x + 2y + 12 = 0$;

57.1. Pendiente : 2, $\left(\frac{1}{2}, 0\right), (0, -1)$; 57.2. Pendiente : $-\frac{1}{2}$, $(0,0), (0,0)$; 57.3. Pendiente : 0, No tiene, $\left(0, -\frac{5}{2}\right)$;

57.4. Pendiente : Indefinida, $(2, 0)$, No tiene; 57.5. Pendiente : -2, $\left(\frac{5}{2}, 0\right), (0, 5)$; 59. Por abajo;

60.*a*. $-\frac{2}{5}$; 60.*b*. $-\frac{3}{4}$; 60.*c*. -3; 60.*d*. 1; 60.*e*. $-\frac{3}{7}$; 60.*f*. $-\frac{3}{2}$; 61.1. $(-2, 5), \quad x + 2 = 0$;

61.2. $(2, 3), \quad 2y - 5x + 4 = 0$; 61.3. $\left(\frac{27}{19}, \frac{20}{19}\right), \quad 38x + 95y = 154$; 61.4. $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{5}\right), \quad 60y + 50x + 11 = 0$;

61.5. $(-1, 3), \quad 5x + 2y - 1 = 0$; 61.6. Rectas paralelas; 61.7. $\left(-\frac{13}{11}, \frac{120}{11}\right), \quad 77y + 33x - 801 = 0$;

62.*a*. Si; 62.*b*. No; 64. $2 + \sqrt{5}$; 65.1. $y = 3x + 12$; 65.2. $y - 6 = 0$; 65.3. $5y - 2x - 2 = 0$;

65.4. $y + 8x - 12 = 0$; 65.5. $x - 4 = 0$; 66. $y = 2x - 2$; 67. 4; 68.*a*. $-\frac{9}{2}$; 68.*b*. 0; 68.*c*. -2;

68.*d*. 3; 68.*e*. 6; 70. $10x + 9y - 70 = 0$; 71. $M = \pm 4, \quad N = \pm 4$; 72. $2x + 3y - 11 = 0$;

73.1. $3x - 2y + 8 = 0$; 73.2. $4x - 3y + 11 = 0$; 73.3. $2x - 9y + 13 = 0$; 73.4. $x + 2 = 0$; 73.5. $y = x + 3$;

74. $y = -\frac{1}{2}x + 1, \quad y = -\frac{3}{2}x - 3$; 75. P_1, P_2 Si, P_3 No; 76. 29; 77. 7; 78. -3;

79.*a*. $y = 4x - 11$; 79.*b*. $y = 2x$; 79.*c*. $y - 1 = 0$; 79.*d*. $x + 1 = 0$; 79.*e*. $y + 7 = 0$; 79.*f*. $x + 3 = 0$;

79.*g*. $3x + 8y = 17$; 79.*h*. $y = x + 3$; 79.*i*. $y - 4 = \sqrt{3}(x + 1)$; 79.*j*. $3y - 4x + 12 = 0$; 79.*k*. $y = 2x - 3$;

79.*l*. $4x - 3y + 12 = 0$; 79.*m*. $y = 2 - 4x$; 79.*n*. $x + 2y - 5 = 0$; 79.*o*. $x + y + 2 = 0$; 79.*p*. $y = x + 3$;

79.*q*. $3x + 5y = 61$; 79.*r*. $4x - 3y = 0$; 79.*s*. $2x + y + 5 = 0$; 79.*t*. $2y = 3x + 9$; 79.*u*. $y = 5$; 79.*v*. $y = x$;

79.*w*. $y = \frac{1}{2}x + 2$; 79.*x*. $y = 1$; 79.*y*. $x = 5$; 80.*a*. $-\frac{3}{2}$; 80.*b*. 6; 80.*c*. $\frac{9}{2}$; 80.*d*. -3;

82. $\left(\frac{24}{5}, \frac{12}{5}\right)$; 83.*a*. Si; 83.*b*. Si; 83.*c*. No; 83.*d*. Si; 83.*e*. No; 83.*f*. No; 84.*a*. No;

84.*b*. Si; 84.*c*. No; 84.*d*. No; 84.*e*. Si; 84.*f*. Si; 85.*a*. 9; 85.*b*. 1; 85.*c*. 1; 85.*d*. 3;

86.*a*. -10; 86.*b*. 25; 86.*c*. $\frac{2}{25}$; 86.*d*. $-\frac{33}{10}$; 87.*a*. $\frac{17}{2}$; 87.*b*. $-\frac{5}{2}$; 87.*c*. $-\frac{4}{5}$; 87.*d*. $-\frac{16}{5}$;

88.*a*. $(1 - h)(h - 2)$; 88.*b*. $(1 - x - h)(h + x)$; 88.*c*. $(1 - 2x - h)$; 89.*a*. $\frac{h+2}{\sqrt{1-h}}$; 89.*b*. $\frac{x+h}{\sqrt{3-x-h}}$;

89.*c*. $\frac{(x+h)\sqrt{3-x} - x\sqrt{3-x-h}}{h\sqrt{3-x-h}\sqrt{3-x}}$; 90.1.*a*. $-3h^2 + 12h - 10$; 90.1.*b*. $2 - 3h^2 - 3x^2 - 6hx$; 90.1.*c*. $-3(h + 2x)$;

90.2.*a*. $\frac{2-h}{h}$; 90.2.*b*. $\frac{x+h}{2-x-h}$; 90.2.*c*. $\frac{2}{(h+x-2)(x-2)}$; 90.3.*a*. $\frac{2-h}{\sqrt{5-4h+h^2}}$; 90.3.*b*. $\frac{x+h}{\sqrt{1+(x+h)^2}}$;

90.3.*c*. $\frac{(x+h)\sqrt{1+x^2} - x\sqrt{1+(x+h)^2}}{h\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+(x+h)^2}}$; 90.4.*a*. $\frac{1}{\sqrt{1-2h}}$; 90.4.*b*. $\frac{1}{\sqrt{2x+2h-3}}$; 90.4.*c*. $\frac{\sqrt{2x-3} - \sqrt{2x+2h-3}}{h\sqrt{2x-3}\sqrt{2x+2h-3}}$;

91. $b^2 + ab + a^2$; 92. $\frac{ab-1}{ab}$; 93. $ab + a^2 + b^2 - 2$; 94. $\frac{b-a}{ab+1}$; 96.1. $[2, \infty)$; 96.2. $(-\infty, 3]$;

96.3. $(-\infty, 0]$; 96.4. $\mathbb{R}$; 96.5. $[1, \infty)$; 96.6. $\mathbb{R}$; 96.7. $\mathbb{R}$; 96.8. $(-\infty, 0] \cup [6, \infty)$;

96.9. $(-\infty, -1] \cup [0, \infty)$; 96.10. $\mathbb{R}$; 96.11. $\mathbb{R}$; 96.12. $(-\infty, 3]$; 96.13. $\mathbb{R} - \left\{\pm\sqrt{3}\right\}$; 96.14. $\mathbb{R}$; 96.15. $\mathbb{R}$;

96.16. $\mathbb{R} - \{2\}$; 96.17. $\mathbb{R} - \{3\}$; 96.18. $\mathbb{R}$; 96.19. $\mathbb{R}$; 96.20. $\mathbb{R} - \{1\}$; 96.21. $\mathbb{R}$; 96.22. $(-\infty, 0)$;

96.23. $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$; 96.24. $(-1, 1)$; 96.25. $(-\infty, -1] \cup [1, \infty) \cup \{0\}$; 96.26. $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$;

96.27. $(-\infty, -5) \cup [0, \infty)$; 96.28. $(-\infty, -2] \cup (3, \infty)$; 96.29. $(-\infty, -4) \cup [-1, 0] \cup [1, 4)$; 96.30. $[0, 1) \cup [2, \infty)$;

96.31. $(-\infty, 0] \cup (2, 3) \cup [7, \infty)$; 96.32. $(-\infty, 1] \cup (5, \infty)$; 96.33. $\left[-\frac{6}{5}, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, -\frac{2}{11}\right]$; 96.34. $\mathbb{R} - \{0\}$;

96.35. $(-2, -1) \cup [0, 2]$; 97.1.*a*. $(f + g)(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+3}} + \sqrt[4]{7 - 3x}$; 97.1.*b*. $(f \cdot g)(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+3}}\ \sqrt[4]{7 - 3x}$;

97.1.*c*. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x-2}}\,\frac{1}{\sqrt[4]{7-3x}}$; 97.1.*d*. Dom $(f + g) =$ Dom. $(f \cdot g) = (-\infty, -3) \cup \left[2, \frac{7}{3}\right]$; Dom $\left(\frac{f}{g}\right) = (-\infty, -3) \cup \left(2, \frac{7}{3}\right)$;

97.2.*a*. $(f + g)(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{16-x^2}} + \sqrt{\frac{x^2+2x}{|x^3-8|}}$; 97.2.*b*. $(f \cdot g)(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{16-x^2}}\sqrt{\frac{x^2+2x}{|x^3-8|}}$; 97.2.*c*. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{16-x^2}} \cdot \sqrt{\frac{|x^3-8|}{x^2+2x}}$;

97.2.*d*. Cada Dom : $(-\infty, -2) \cup (0, \infty) - \{\pm 4, 2\}$; 97.3.*a*. $(f + g)(x) = \frac{3x}{2x^2-x-1}$; 97.3.*b*. $(f \cdot g)(x) = \frac{1}{2x^2-x-1}$;

97.3.*c*. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{2x+1}{x-1}$; 97.3.*d*. Cada Dom $= \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}, 1\right\}$; 97.4.*a*. $(f + g)(x) = \sqrt{-x} + \sqrt{x + 2}$;

97.4.*b*. $(f \cdot g)(x) = \sqrt{-x^2 - 2x}$; 97.4.*c*. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{-x}}{\sqrt{x+2}}$; 97.4.*d*. Dom $(f + g) =$ Dom $(f \cdot g) = [-2, 0]$;

Dom $\left(\frac{f}{g}\right) = (-2, 0]$; 97.5.*a*. $(f + g)(x) = |x| + \sqrt{3 - |x|}$; 97.5.*b*. $(f \cdot g)(x) = |x|\sqrt{3 - |x|}$;

97.5.*c*. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{|x|}{\sqrt{3-|x|}}$; 97.5.*d*. Dom $(f + g) =$ Dom $(f \cdot g) = [-3, 3]$ Dom $\left(\frac{f}{g}\right) = (-3, 3)$;

97.6.*a*. $(f + g)(x) = \frac{1}{|x^2-4|} + \sqrt{5 - x}$; 97.6.*b*. $(f \cdot g)(x) = \frac{\sqrt{5-x}}{|x^2-4|}$; 97.6.*c*. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{1}{|x^2-4|\sqrt{5-x}}$;

97.6.*d*. Dom $(f + g) =$ Dom $(f \cdot g) = (-\infty, 5] - \{\pm 2\}$; Dom $\left(\frac{f}{g}\right) = (-\infty, 5) - \{\pm 2\}$; Dom $\left(\frac{f}{g}\right) = (0, 7) - \{-2\}$;

98.1. $[-7, 7]$; 98.2. $\left(1, \sqrt{10}\right]$; 98.3. $[-3, 47]$; 98.4. $\left(-2, \frac{-2}{33}\right]$; 98.5. $[5, 19]$; 98.6. $(-7, 23]$;

98.7. $\left(\frac{1}{3}, 2\right)$; 98.8. $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$; 98.9. $[-1, 35]$; 98.10. $(-\infty, -60) \cup [15, \infty)$; 98.11. $\left(-1, -\frac{1}{15}\right)$;

98.12. $\left(\sqrt[3]{2} - 4, \sqrt[3]{20} - 1\right)$; 98.13. $\left[\frac{1}{6}, \frac{1}{4}\right]$; 98.14. $\left(\frac{3}{10}, \frac{14}{5}\right)$; 98.15. $\left(\frac{3}{2}, 3\right]$; 98.16. $[1, 4]$;

99.1. Dom $f = (-\infty, 0]$, Rgo $f = [-\infty, 1)$; 99.2. Dom $f = \mathbb{R} - \{3\}$, Rgo $f = \mathbb{R} - \{0\}$; 99.3. Dom $f = \mathbb{R}$, Rgo $f = [-\infty, 3)$; 99.4. Dom $f = [-2, 2]$, Rgo $f = [0, 2]$; 99.5. Dom $f = \mathbb{R}$, Rgo $f = \left(0, \frac{1}{9}\right]$;

99.6. Dom $f = \mathbb{R} - \{-4\}$, Rgo $f = \mathbb{R} - \{0\}$; 99.7. Dom $f = [0, \infty)$, Rgo $f = (-\infty, 1]$; 99.8. Dom $f = \left[\frac{5}{2}, \infty\right)$, Rgo $f = [0, \infty)$; 99.9. Dom $f = \mathbb{R}$, Rgo $f = [-9, \infty)$; 99.10. Dom $f = (-\infty, 6]$, Rgo $f = [0, \infty)$;

99.11. Dom $f = \mathbb{R} - \{\pm 3\}$, Rgo $f = \left(-\infty, -\frac{1}{9}\right] \cup (0, \infty)$; 99.12. Dom $f = [-3, 3]$, Rgo $f = [0, 3]$; 99.13. Dom $f = \mathbb{R} - \{3\}$, Rgo $f = (0, \infty)$; 99.14. Dom $f = \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\}$, Rgo $f = \mathbb{R} - \{0\}$; 99.15. Dom $f = \mathbb{R} - \{9\}$, Rgo $f = \mathbb{R} - \{1\}$;

99.16. Dom $f = [0, \infty)$, Rgo $f = (-\infty, 2]$; 99.17. Dom $f = \left[\frac{9}{4}, \infty\right)$, Rgo $f = [0, \infty)$; 99.18. Dom $f = \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right) \cup \left[\frac{2}{3}, \infty\right)$, Rgo $f = [0, \infty)$; 100.1. $(-\infty, 0] \cup (5, \infty)$; 100.2. $(5, \infty)$; 100.3. $(-\infty, 0] \cup [5, \infty)$; 100.4. $[5, \infty)$;

100.5. $[5, \infty)$; 100.6. No está definida; 100.7. No está definida; 100.8. $(-\infty, -1] \cup [1, 2)$; 100.9. No está definida;

100.10. $(-\infty, -1] \cup [1, 2]$; 100.11. $[-3, 4] - \left\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right\}$; 100.12. $[-3, 4] - \left\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right\}$; 100.13. $(-\infty, -1] \cup (0, \infty)$;

100.14. $(-\infty, 0]$; 100.15. $[0, \infty) - \{1, 3\}$; 100.16. $\mathbb{R} - \{0\}$; 100.17. $(0, \infty) - \left\{\sqrt{6}\right\}$; 100.18. $(-3, 1] \cup (3, \infty)$;

100.19. $(3, \infty)$; 100.20. $(-\infty, 0]$; 100.21. $[4, 16)$; 100.22. $\mathbb{R} - \{-2, -1\}$; 100.23. $(-\infty, 0]$; 100.24. $[0, \infty)$;

100.25. $[-1, 15]$; 100.26. $[-1, \infty)$; 100.27. $(-1, -2)$; 100.28. $(-\infty, 0) \cup (1, 2]$; 100.29. $[-3, 1) \cup [3, \infty)$;

100.30. $\mathbb{R} - \{1\}$; 100.31. $\mathbb{R} - \{1\}$; 101.1. $f(g(x)) = x^2 + 2$; Dom $f \circ g = \left[0, \sqrt{2}\right]$; 101.2. $f(g(x)) = x^2 + 1$; Dom $f \circ g = \left[0, \sqrt{3}\right]$; 101.3. $f(g(x)) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4x}}$; Dom $f \circ g = (-\infty, 0) \cup (4, \infty)$; 101.4. $f(g(x)) = \frac{1}{x^3}$; Dom $f \circ g = \mathbb{R} - \{0\}$; 101.5. $f(g(x)) = -\frac{x+1}{2}$; Dom $f \circ g = \mathbb{R} - \{-1\}$; 101.6. $f(g(x)) = x + 2\sqrt{x}$; Dom $f \circ g = (0, \infty)$;

102. $F(G(H(x))) = \sqrt{2x - 3}$; 103. $x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$, $x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$, $x = -\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, $x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$; 104.1. $f\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{x}$;

104.2. $g\left(h\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{x-1}{x-2}$; 104.3. $l(-j(-x)) = 3x^8 - 5x^4$; 104.4. $f(g(l(x))) = \frac{1}{6x^4 - 10x^2 + 1}$;

104.5. $h(j(f(g(-2x)))) = -8x(2x - 1)$; 105.1. $f_1(x) = \sqrt{x}$, $f_2(x) = x + 1$, $f_3(x) = \sqrt[3]{x}$, $f(x) = (f_3 \circ f_2 \circ f_1)(x)$;

105.2. $f_1(x) = x - 5$, $f_2(x) = \sqrt{x}$, $f_3(x) = x - 2$, $f_4(x) = \sqrt[3]{x}$, $f_5(x) = -x$, $f(x) = (f_5 \circ f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1)(x)$;

105.3. $f_1(x) = x + 1$, $f_2(x) = \sqrt{x}$, $f_3(x) = -x$, $f_4(x) = 4 + x$, $f(x) = (f_2 \circ f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1)(x)$;

105.4. $h_1(x) = x + 3$, $h_2(x) = \sqrt{x}$, $h_3(x) = -x$, $h_4(x) = 1 + x$, $h_5(x) = \frac{1}{x}$, $h(x) = (h_5 \circ h_4 \circ h_3 \circ h_2 \circ h_1)(x)$;

105.5. $h_1(x) = \sqrt{x}$, $h_2(x) = x + 5$, $h_3(x) = \frac{8}{x}$, $h_4(x) = -x$, $h_5(x) = 4 + x$, $f(x) = (h_5 \circ h_4 \circ h_3 \circ h_2 \circ h_1)(x)$;

105.6. $g_1(x) = x - \frac{5}{2}$, $g_2(x) = x^2$, $g_3(x) = x - \frac{1}{4}$, $g_4(x) = x^6$, $g(x) = (g_4 \circ g_3 \circ g_2 \circ g_1)(x)$;

Bibliografía

1. **Purcell, E. - Varberg, D. - Rigdon, S.**: "Cálculo". Novena Edición. PEARSON Prentice Hall.
2. **Stewart, J.**: "Cálculo". Grupo Editorial Iberoamericano.

Farith Briceño

Última actualizacón: Septiembre 2010

e-mail : farith_72@hotmail.com